

투과도가 큰 다공성 유체층의 열대류 임계시점

윤도영·최창균

서울대학교 공과대학 화학공학과
(1989년 4월 11일 접수, 1989년 5월 15일 채택)

Onset Time of Thermal Convection in Fluid-Saturated Porous Layer with High Permeability

Do Young Yoon and Chang Kyun Choi

Department of Chemical Engineering, College of Engineering, Seoul National University, Seoul 151-742, Korea
(Received 11 April 1989; accepted 15 May 1989)

요 약

하부면이 등가속 가열되는 수평 다공성 유체층의 열대류 개시점을 이론적으로 조사하여 보았다. 전파이론을 근거로 안정성을 해석하여 본 결과, Brinkman의 모델에 대하여 대류 무차원 임계시간은 다음과 같이 예측되었다.

$$\tau_c = 4.384[1 + 0.542(\tau_c/Da)^{7/10}]^{4/7} Ra^{-2/5}$$

본 연구의 결과를 증폭이론에 의한 기존의 결과와 비교하면, 임의의 Darcy 수에 대하여, 발생된 대류는 증폭되어 가시될 수 있을 때까지 임계시간의 4배 정도 소요되는 것으로 보여진다. 이러한 임계조건에 부가하여 열대류에서 운동량 경계층의 특성과 열침투 깊이와의 관계를 조사하여 보았다.

Abstract— Here is reported a theoretical prediction of the onset time for thermal convection in a horizontal porous layer for the case of ramp heating from below. From the stability analysis based on the propagation theory under Brinkman's model the dimensionless critical time to mark convection is predicted as follows:

$$\tau_c = 4.384[1 + 0.542(\tau_c/Da)^{7/10}]^{4/7} Ra^{-2/5}$$

In comparison of the above prediction with extant results by amplification theory, it is seen that for a given Darcy number the initiated convection is amplified to observable magnitude around the time $4\tau_c$. Additionally, some feature of the momentum boundary layer in thermal convection is discussed in connection with the thermal penetration depth.

1. 서 론

하부면이 가열되는 수평 다공성 유체층의 열대류는 Bénard-Rayleigh 문제의 일환으로 응용의 폭이 넓다. 점차 심화되고 있는 제품의 고순도, 미세화에 부응하기 위한 공정의 개발 및 대형 전산기의 냉각 등에 있어서

자연대류의 영향이 자주 거론되고 있으며, 특히 다공성 매질에서의 자연대류는 지열의 이용, 석유 채취 등과 깊은 관련이 있다.

다공성 매질에서 유체의 유동은 다공성 매질의 형태에 따라 상이한 경우가 많다. 매질의 투과도가 상당히 작아 유체의 평균 유속이 낮을 경우에는 유속이 압력차

와 선형관계를 이루는 Darcy의 유동 모델이 적절히 적용된다[1]. 그러나 투과도가 비교적 큰 경우에는 고정 경계면에 대하여 유체의 점성 영향이 고정 (no-slip) 조건을 통하여 나타난다. 따라서 투과도가 클 때, Darcy의 유동모델에서는 수용할 수 없는 고정경계조건을 Brinkman[2]의 유동모델을 통하여 부여할 수 있다. 이와 같은 여러 유동모델들에 대하여 온도 분포가 선형인 경우인 정상상태의 자연대류에 관한 연구는 Combarous와 Bories[3]와 Nield[4] 등에 의하여 잘 보고되어 있다. 그러나 급격한 가열조건하에서는 온도 분포가 시간의존성 비선형이므로, 선형인 경우와는 달리 자연대류에 대한 해석이 용이하지가 않다. 현재 선형이론, 안정성 교환의 원리 등 여러 가정을 통하여 증폭이론[5], 추계모델[6], 에너지법[7] 그리고 전파이론[8] 등이 개발되어 비선형문제에 대한 해석법이 제언되어 있다. 개발된 여러 이론들은 각기 채택한 계에 대한 자연대류 임계조건을 어느 정도 예측할 수 있으나, 실험적, 수치해석상 많은 임의성을 갖고 있다. 그러나 Choi 등[8]에 의해 개발된 전파이론은 이와 같은 임의성을 배제한 결정론적 개념을 갖고 있다. Yoo와 Choi[9] 그리고 Choi와 Yoo[10]는 상부면이 일정시간비율로 냉각되는 균질 유체층에 대하여 Prandtl 수가 무한히 큰 유체, Prandtl 수가 무한히 작은 유체 각 경우에 대하여 전파이론을 통한 안정성 해석으로 기존의 실험치들을 잘 예측할 수 있었다.

최근 Yoon, Choi와 Yoo[11]는 Darcy의 모델을 만족하는 다공성 유체층의 하부면을 일정시간비율로 가열할 때 유발되는 자연대류의 임계조건을 전파이론을 통해 예측한 결과 기존의 실험자료와 잘 부합됨을 알 수 있었다. 또한 Yoon과 Choi[12]는 등온가열하에 있는 다공성 매질계에 대하여 전파이론을 통해 자연대류 임계조건을 구하고, 이를 난류 열전달 모델에 응용시켜 유도한 열전달 상관식은 기존의 실험치들을 잘 예측할 수 있었다. 본 연구에서는 전파이론의 활용도를 한층 높여, Brinkman의 모델을 만족하는 다공성 유체층에 대한 자연대류 임계조건을 예측하고자 한다. 본 연구를 통하여 구해진 자료들은 투과도가 비교적 큰 다공성 매질층과 관련된 공정의 개발에 많은 도움이 될 수 있을 것이다.

2. 안정성 해석

본 연구에서는, Fig. 1에 나타나 있는 바와 같이, 두 무한 평판 사이에 비압축성 뉴턴 유체로 포화되어 있

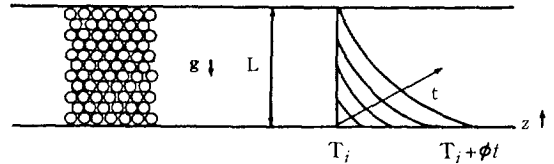


Fig. 1. Schematic configuration of system.

는 다공성 유체층을 기본계로 채택하였다. 공극율이 ϵ , 투과도가 K 인 매질층의 깊이는 L 이고 윗면과 아랫면은 모두 고정경계면이다. 초기 유체층은 T_i 로 정상상태를 유지하고 있다. 어느 순간($t=0$)부터 하부면을 일정시간비율 ϕ 로 등가속가열을 하면 처음에는 전도에 의하여 열이 이동되지만, 온도차가 점차 커지면 비선형 온도분포하에서 자연대류가 전도에 부가된다. 이러한 자연대류는 ϕ 값이 커짐에 따라 빨리 개시된다. 자연대류를 유발시키는 부력의 크기는 Rayleigh 수에 의하여, 다공성 매질의 영향은 Darcy 수에 의하여 좌우되는데, 일정시간비율로 가열되는 다공성 매질계에서는 위의 무차원수들이 다음과 같이 정의된다.

$$Ra = \frac{g\beta\phi L^5}{\alpha^2\nu}$$

$$Da = K/L^2$$

$$Ra_D = Ra \cdot Da$$

여기서 Ra 는 Rayleigh 수, Da 는 Darcy 수, Ra_D 는 Darcy-Rayleigh 수이고, g 는 중력가속도, β 는 유체의 부피팽창계수, α 는 유효 열확산도 그리고 ν 는 유체의 동점도를 각각 나타낸다.

Rudraiah 등[13]은 온도분포가 선형인 정상상태의 다공성 매질층에서 자연대류 임계 Rayleigh 수, 즉 Ra_c 가 임의의 Darcy 수에 대하여 다음과 같은 관계를 취할 것이라 보고하였다.

$$Ra_c = 1708 + 39.5/Da \tag{1}$$

위의 식에서 Da 가 무한히 크면 임계 Rayleigh 수가 1708이 되어 균질 유체층을 의미하고, Da 가 무한히 작아지면 임계 Darcy-Rayleigh 수가 39.5가 되어 Darcy의 법칙을 만족하는 다공성 유체층에 해당되는 자연대류 임계조건임을 의미한다. 식 (1)은 근사식인데 반하여, Walker와 Homsy[14]는 전산모사를 통하여 전 Darcy 수에 대한 임계 Rayleigh 수를 계산하였다. 본 연구에서는 임계 Rayleigh 수보다 큰 가열조건하의 다공성 유체층에서 임의의 Darcy 수에 대한 자연대류 임계시점을 이론적으로 예측하고자 한다.

자연대류 개시점 부근에서 발생한 교란의 물리량은

국부부피 평균값을 취하여 정의하고[1], 제시된 Brinkman[2]의 모델을 채택하여 다음과 같은 운동방정식을 설정하였다.

$$-\nabla p - \frac{\mu}{K} \mathbf{u} + \mu \nabla^2 \mathbf{u} + \rho \mathbf{g} = 0 \quad (2)$$

여기서 p 는 압력, \mathbf{u} 는 속도벡터, μ 는 유체의 점도 그리고 ρ 는 유체의 밀도를 각각 나타낸다. 차원을 갖고 있는 각 물리량들을 무차원화시키기 위하여 L , (L^2/α) , $\phi L^2/\alpha$, $\nu \alpha/g\beta L^3$, α/L 을 각각 거리, 시간, 기본온도, 온도교란 그리고 속도교란의 척도인자로 사용하였다. Deep-pool 계에 대하여 전도만에 의한 기본온도 θ_0 은 다음과 같이 적분법으로 모사된다[9-11].

$$\theta_0 = \tau(1-\zeta)^5(1-H_{\zeta-1}) \quad (3)$$

여기서 $H_{\zeta-1}$ 은 단위계단함수이고, τ 는 무차원시간, $\zeta (=z/\delta)$ 는 무차원깊이 z 가 무차원 열침투깊이 δ 에 의하여 확산된 새로운 무차원깊이를 의미한다. 즉 $\zeta=1$ 이면 열침투깊이를 의미한다. 식 (3)의 근사해는 $\tau \leq 0.05$ 이내에서 엄밀해와 잘 일치한다[9-11]. 이때 열침투깊이 δ 는 열전도식의 열수지를 통해 $\sqrt{20\tau}$ 로 계산된다[9-11]. Rayleigh 수가 커질수록 자연대류 임계시점 τ_c 는 짧아지므로 본 연구의 deep-pool 계에서는 Rayleigh 수가 5×10^6 보다 클수록 식 (3)의 유용도는 더욱 높아진다.

자연대류 개시점인 τ_c 에 이르면, 압력, 온도장, 속도장에 변화가 생기므로, 선형안정성 이론을 도입하여 각 물리량들의 크기를 무한히 작은 양의 각 교란량과 대류 이전의 기본량과의 합으로 가정한다. 한편 Boussinesq 근사에 의하여 중력장에서 온도의 변화에 따른 밀도만의 변화를 고려하고 이들의 관계를 선형으로 가정한다. 식 (2)에 컬(curl)을 두번 취하여 압력항을 소거하면, 선형이론은 수직속도교란 w_1 , 온도교란 θ_1 에 대한 다음과 같은 교란방정식의 유도가 가능하다.

$$[-\nabla^2 + \frac{1}{Da}] \nabla^2 w_1 = [\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}] \theta_1 \quad (4)$$

$$\frac{\partial \theta_1}{\partial \tau} + Ra w_1 \frac{\partial \theta_0}{\partial z} = \nabla^2 \theta_1 \quad (5)$$

식 (5)의 유도는 Wankat 과 Schowalter[7]에 의해 제시된 에너지식에 근거하였으며, 위의 식들의 유도는 Yoon, Choi와 Yoo[11]에 의하여 보고된 바 있다. 식 (4)에서 Da 가 무척 커지면 균질 유체층으로[9, 10, 13, 14], Da 가 무척 작아지면 Darcy의 유동을 만족하는 다공성 유체층으로[11-14] 각각 계가 전환된다. 따라서 Brinkman의 모델을 근거로 한 식 (4)는

Darcy 수가 유동특성에 미치는 영향을 검토할 수 있는 적절한 지배방정식이라 할 수 있다. 식 (4)와 (5)에 적용되는 초기조건과 경계조건은 다음과 같다.

$$\theta_1 = 0 \quad \text{at } \tau = 0 \quad (6a)$$

$$w_1 = \frac{\partial w_1}{\partial z} = \theta_1 = 0 \quad \text{for } z=0 \text{ and } z=1 \quad (6b)$$

식 (6)의 조건들은 초기 정지상태의 유체에 대하여, 양 경계면에서 움직임이 없는 고정상태이고, 고정상태의 유체는 온도교란을 갖지 않음을 의미한다[9-14].

3. 전파이론

급격한 가열하에서 자연대류가 발생하기 이전에는 전도가 지배적으로 열이동을 좌우한다. 따라서 임계시점 근처에서 온도장은 전도에 의한 지배방정식인 식 (3)이 유효하다. 발생된 무작위성의 교란들은 점차 성장하기도 하며, 감폭되어 사라지는 것들도 있다. 이와 같은 교란의 시간의존성 변화에 대하여, 기존의 동결시간 모델, 증폭이론, 추계이론 등이 갖고 있는 난점들은 이미 지적된 바 있다. 전파이론에서는 안정성 교환의 원리하에서 시간의 변화에 따른 교란의 증폭 및 감폭을 고루 수용한다.

한정된 깊이내에서 발생한 교란은 무한한 x-y 면에 대한 주기성을 갖고 있으므로[3], 그 특성은 다음과 같은 무차원파수 'a'로 나타낼 수 있다.

$$[w_1, \theta_1] = [w_1^*(\tau, z), \theta_1^*(\tau, z)] \exp[i(a_x x + a_y y)] \quad (7)$$

여기서 i 는 허수이고, a 는 $(a_x^2 + a_y^2)^{1/2}$, 즉 수평면상의 파수를 나타낸다. z 방향에 대한 deep-pool 계에서는 시간의존성 요소가 유사변수에 의해 해석될 수 있다 [15]. 전파이론에서는 유사변수를 도입하되, 무차원 열침투깊이 δ 를 이용하여 이를 새로운 길이 척도인자로 사용하는데 그 특징이 있다. 유사변수 ξ 를 z/δ 로 정의하여 새로운 길이차원으로 도입하고, 교란의 진폭함수 w_1^* , θ_1^* 를 다음과 같이 변환시킨다.

$$[w_1^*(\tau, z), \theta_1^*(\tau, z)] = [\delta^2 w^*(\xi), \theta^*(\xi)] \quad (8)$$

식 (8)의 w^* 와 θ^* 는 ξ 만의 함수로서 식 (4)와 (5)를 다음과 같이 ξ 만의 식으로 전환시킨다.

$$(D^2 - a^{*2}) [(D^2 - a^{*2}) - 1/Da^*] w^* = a^{*2} \theta^* \quad (9)$$

$$(D^2 + 10\xi D - a^{*2}) \theta^* = -\frac{1}{4} Ra^* (1-\xi)^4 (1-H_{\zeta-1}) w^* \quad (10)$$

여기서 D 는 $d/d\xi$ 이고, a^* , Da^* , Ra^* 는 길이차원

δ 로 재환산된 파수, Darcy 수, Rayleigh 수로서 각각 $a\delta$, Da/δ^2 , $Ra\delta^5$ 을 의미한다. 식 (9)와 (10)에 나타나 있는 Ra^* , Da^* , a^* 등은 열침투깊이 δ 내에서 정의되며, Howard[16]에 의해 제시된 전도층 모델이 유효하다면 전도상태가 어느정도 지배적인 자연대류 임계시점 근처에서는 Ra^* , Da^* , a^* 의 사용이 합리적일 것이다. 또한 Elder[17]는 Ra_b^* 와 $Ra_{b,c}$ (=39.5)를 이용하여 자연대류 임계시점을 제시한 바 있다. 그러나 무엇보다도 실험적 결과들을 보면 Foster [5]와 Kaviany[18] 등의 보고에서 " $Ra\tau^{5/2}$ =상수" 형태로 자연대류 임계시점이 나타남을 인지할 수 있다. 이상의 자료들을 바탕으로 하여 a^* , Da^* , Ra^* 등을 상수로 본다면, 식 (9)와 (10)은 상미분방정식의 고유치 문제로 볼 수 있다. 이와 같이 a^* , Da^* , Ra^* 를 고유치로 생각하고 유사변수 ξ 에 대하여 상수로 보는데 전파이론의 특징이 있으며, 실질적인 열전달이 이루어지는 열침투깊이에 해당되는 길이를 도입하여 길이차원을 재정렬하는 것이 전파이론의 핵심이라고 할 수 있다.

4. 수학적 해법

계의 구조를 좌우하는 Da^* , 유동의 모습을 나타내는 a^* 와 부력의 크기와 관계가 있는 Ra^* 등은 지배방정식인 식 (9)와 (10)의 고유치들이며, 이 지배식들은 deep-pool 계에 대하여 다음과 같은 경계조건들을 만족해야 한다.

$$w^* = Dw^* = \theta^* = 0 \quad \text{for } \zeta = 0 \text{ and } \zeta \rightarrow \infty \quad (11)$$

식 (10)의 우변항은 열침투깊이 외부지역인 $\zeta \geq 1$ 에서 무시되므로, 이 지역에서 θ^* 는 WKB 방법으로 다음과 같은 근사해가 구해진다[11].

$$\theta^* \approx \frac{1}{\sqrt{25\zeta^2 + 5 + a^{*2}}} \exp\left[-\frac{5}{2}\zeta^2 - \int_1^\zeta \sqrt{25\eta^2 + 5 + a^{*2}} d\eta\right] \quad (12)$$

식 (12)를 이용하면, 식 (9)에서 w^* 를 연산자기법을 통하여 구할 수 있다. 열침투깊이 내인 $\zeta \leq 1$ 인 영역에서는 Frobenius 법에 의한 급수해가 다음과 같이 가능하다.

$$w^* = \sum_{i=0}^5 H_i f_i(\zeta), \quad f_i(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} r_n^{(i)} \zeta^n \quad (13)$$

식 (13)에서 급수의 계수 $r_n^{(i)}$ 는 식 (9)와 (10)을 통하여 다음과 같이 결정된다.

$$r_n^{(0)} = -[(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(10(n-6)$$

$$\begin{aligned} & - (2a^{*2} + b^{*2})]r_{n-2}^{(1)} + (n-4)(n-5) \\ & [a^{*2}(a^{*2} + 2b^{*2}) - 10(a^{*2} + b^{*2})(n-6)]r_{n-4}^{(1)} \\ & + a^{*2}[10b^{*2}(n-6) - a^{*2}b^{*2} + Ra^*]r_{n-6}^{(1)} \\ & - 4a^{*2}Ra^*r_{n-7}^{(1)} + 6a^{*2}Ra^*r_{n-8}^{(1)} - 4a^{*2}Ra^*r_{n-9}^{(1)} \\ & + a^{*2}Ra^*r_{n-10}^{(1)}] / n(n-1)(n-2)(n-3) \\ & (n-4)(n-5) \end{aligned} \quad (14)$$

여기서 $b^{*2} = a^{*2} + 1/Da^*$ 이다. 위의 해법절차들은 관련된 논문에 잘 소개되어 있다[9-11].

열침투깊이 이내인 $\zeta \leq 1$ 인 영역과 열침투깊이 외부인 $\zeta \geq 1$ 인 영역에 대하여 속도교란과 온도교란의 해는 식 (11)의 경계조건을 만족해야 하고, w^* 에 대한 열침투깊이 내부와 외부의 해들은 $\xi = 1$, 즉 열침투깊이에서 속도, 온도, 응력 등이 연속되어야 하므로 다음과 같은 수학적 관계를 만족해야 한다.

$$D^n w_{inner}^* = D^n w_{outer}^* \quad \text{at } \zeta = 1; n = 0, 1, 2, 3, 4, 5 \quad (15)$$

식 (15)의 조건은 다음과 같은 (6×6)의 제곱행렬식의 관계를 이룬다.

$$\begin{vmatrix} f_2(1) + \frac{a^{*2} + b^{*2}}{12} f_4(1) & f_3(1) & f_3(1) & -1 & -1 & 0 \\ f_2'(1) + \frac{a^{*2} + b^{*2}}{12} f_4'(1) & f_3'(1) & f_3'(1) & a^* & b^* & 0 \\ f_2''(1) + \frac{a^{*2} + b^{*2}}{12} f_4''(1) & f_3''(1) & f_3''(1) & -a^{*2} - b^{*2} & 0 & \\ f_2'''(1) + \frac{a^{*2} + b^{*2}}{12} f_4'''(1) & f_3'''(1) & f_3'''(1) & a^{*3} & b^{*3} & 0 \\ f_2^{IV}(1) + \frac{a^{*2} + b^{*2}}{12} f_4^{IV}(1) & f_3^{IV}(1) & f_3^{IV}(1) & -a^{*4} - b^{*4} & & \\ & & & & & -\theta^*(1) \\ f_2^V(1) + \frac{a^{*2} + b^{*2}}{12} f_4^V(1) & f_3^V(1) & f_3^V(1) & a^{*5} & b^{*5} & \\ & & & & & -\theta^{*1}(1) \end{vmatrix} = 0 \quad (16)$$

w^* 가 단순해를 갖지 않기 위하여는 식 (16)의 (6×6) 제곱 행렬식의 값이 0이어야 한다. 이를 위하여 Da^* 를 고정하고 식 (16)을 만족하는 a^* 와 Ra^* 의 고유치를 전산모사를 통하여 구하였다.

5. 결과 및 검토

앞의 절차에 따라 Da^* 의 각 경우에 대한 a^* 와 Ra^* 를 구한 결과를 도시하면 Fig. 2와 같다. 각 Da^* 에 대한 중립안정성 곡선에서 최소의 Ra^* 가 자연대류 임

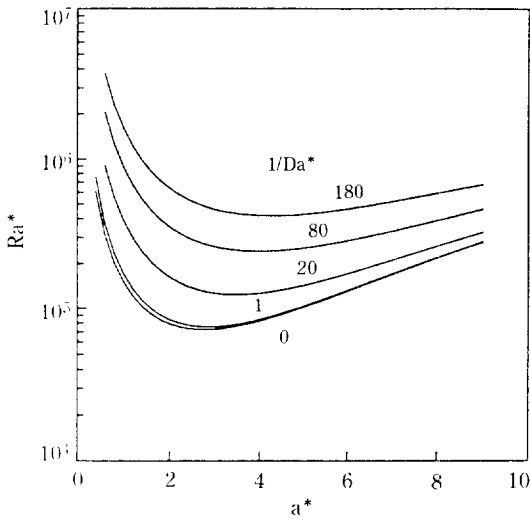


Fig. 2. Neutral stability curves.

제조건을 세시해 준다. 최소 Ra^* 를 Ra_c^* 라 할 때, Ra_c^* 에 해당되는 a^* 를 채택하면 주어진 Da^* 에 대한 자연대류 임계조건이 결정된다. 그림에서 보면 Da^* 가 감소할수록 Ra^* 는 점차 커진다. 또한 Da^* 가 무한히 커지면 그림에서 보이듯이 일정한 모습의 중립안정성 곡선이 형성된다. Da^* 값이 무한히 큰 경우는 식 (4)와 (9)를 건주어 볼 때 $1/Da$ 값이 0에 해당되는 균질 유체층을 의미한다. Brinkman[2]의 운동방정식은 Prandtl 수가 큰 유체에 국한되므로, 본 연구에서 Da^* 가 무한히 클 때는 Prandtl 수가 큰 균질 유체층에 해당된다. 이 경우 전파이론을 통한 Yoo와 Choi[9]의 균질 유체층의 결과와 본 연구의 결과가 잘 일치하고 있음을 알 수 있다. 또한 Da^* 가 무한히 작아지면, 지배방정식은 Darcy의 모델로 전환된다. 즉 결과에서 보면, Da^* 가 점차 작아지면 Ra^* Da^* 가 어느 상수값으로 수렴되어, Yoon, Choi와 Yoo[11]의 Darcy의 법칙에 의한 결과와 일치하게 된다.

고정된 Da^* 에 대하여 중립안정성 곡선상의 Ra_c^* 와 이에 해당되는 a_c^* 를 Da^* 의 변화에 따라 Fig. 3에 도시하였다. Ra_c^* 는, 균질 유체층에 해당되는 Da^* 가 무척 커지면, 어느 한 값에 수렴해 있다. 또한 Da^* 가 점차 작아짐에 따라 Ra_c^* 는 점차 증가하여 Da^* 가 거의 0일 때 $Ra_c^*Da^*$ 는 상수로 수렴해 있음을 볼 수 있다. a_c^* 는 Da^* 가 큰 경우에 비하여 작을 때 그 값이 커지며, Da^* 가 무한히 큰 경우와 거의 0일 때 양 극단의 값들은 수렴해 있다. Da^* 가 작아지면 다공성 매질의 투과도가 점차 작아짐을 의미하며, 결국 투과도

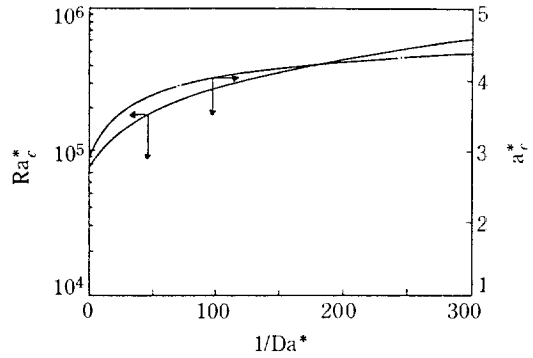


Fig. 3. Critical stability conditions.

가 작아질수록 유동은 많은 저항을 받게 되므로, Ra_c^* 는 투과도가 작아질수록 큰 값을 보임은 타당한 것으로 고려된다. 또한 파수의 변화는, 투과도가 작아질수록 유동의 형태가 작은 모습으로 나타남을 의미한다고 볼 수 있다.

Fig. 2에 나타나 있는 자연대류 임계조건을 이용하여, (Da^*, Ra_c^*) 군을 수식으로 표시하면 다음과 같은 자연대류 임계시점 τ_c 에 대한 근사식이 된다.

$$\tau_c = 4.384 [1 + 0.542 (\tau_c/Da)^{7/10}]^{4/7} Ra^{-2/3} \quad (17)$$

식 (17)의 오차범위는 전 (Da^*, Ra_c^*) 군에 대하여 1% 이내이다. Rayleigh 수를 5×10^8 , 8.87×10^7 , 5×10^7 으로 각각 고정하고, Darcy 수에 대한 자연대류 임계시점 τ_c 를 식 (17)로부터 구하면 Fig. 4와 같은 그림이 얻어진다. 그림에서 보면, Ra 가 커질수록 전반적으로 τ_c 가 작은 값으로 정해지며, 같은 Ra 에 대해

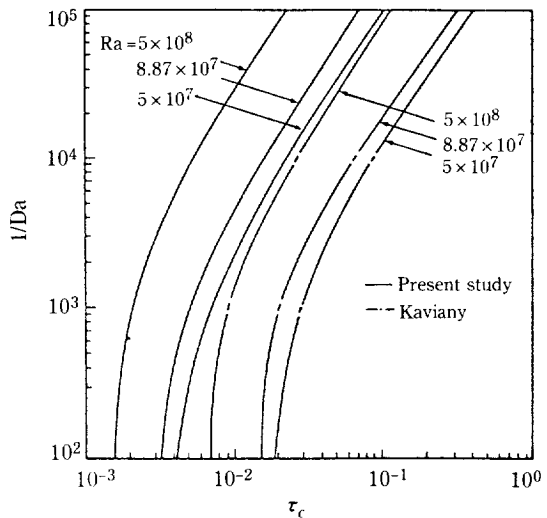


Fig. 4. Variational magnitude of onset time.

여 Da 가 커져서 10^{-2} 보다 크면, Darcy 수는 자연대류 임계시점에 영향을 끼치지 못하나, Da 가 작아지면 τ_c 는 크게 결정되므로 같은 Rayleigh 수에 대하여 Darcy 수가 작아질수록 자연대류는 늦게 개시됨을 알 수 있다. 이와 같은 Darcy 수의 영향은 $10^{-4} \leq Da \leq 10^{-2}$ 영역에서 자연대류 임계시점의 결정에 지대함을 알 수 있다. 이는 Walker와 Homay[14]에 의해 구해진 정상상태에서의 Darcy 수의 영향이 비정상상태에서도 유사하게 적용될 수 있음을 보여준다. 결국 $Da \geq 10^{-2}$ 영역에서는 균질 유체층으로, 또한 $Da \leq 10^{-4}$ 에서는 Darcy의 법칙을 만족하는 다공성 유체층으로 계가 전환되며, $10^{-4} \leq Da \leq 10^{-2}$ 에서는 점성 유체가 고정경계면에 대하여 고정되는 다공성 유체층으로서 Darcy 수가 유동에 중요한 역할을 하고 있는 것으로 관측된다. 석유 유정과 같이 큰 바위 등이 다공성 매질을 이루고 있는 실제계에서는 Darcy 수가 비교적 커져서 Brinkman의 모델이 종종 거론된다[4]. Fig. 4에서는 Kaviany[18]의 결과와 본 연구의 결과를 서로 비교하였다. Kaviany[18]는 $Pr=2.3$ 의 경우인데, Kaviany에 의하면 $Pr \geq 1$ 일 때 Prandtl 수의 영향은 거의 없다고 보고하였으므로, 이를 고려하면 전파이론에 의한 본 연구의 결과와 증폭이론에 의한 Kaviany의 결과는 Fig. 4를 통해 잘 대비된다고 할 수 있다. 전파이론으로 구한 식 (17)의 τ_c 는 무한소의 교란이 태동되는 시점을 의미하는데 비해, Kaviany의 증폭이론은 $\tau=0$ 일 때 임의로 교란의 양을 가정하고 그것의 증폭율에 따라 자연대류 임계시점을 규정하므로 두 이론은 개념적으로 상당한 시각차를 갖고 있다. 즉 증폭이론의 결과는 가시대류 임계시점에 가깝다고 볼 수 있다. 전파이론에 의한 예측은 증폭이론에 비해 전반적으로 4배 정도 빠르게 자연대류 임계시점을 정해주며, 이는 무한

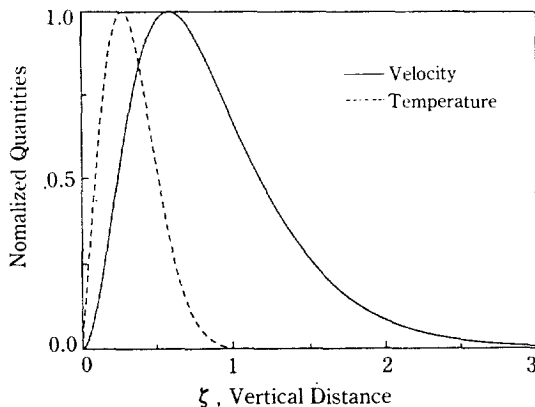


Fig. 5. Distribution of disturbances for $Da^*=1$.

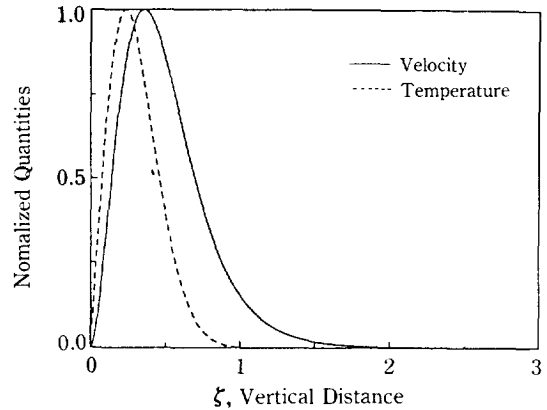


Fig. 6. Distribution of disturbances for $1/Da^*=180$.

소의 교란이 가시화될 수 있을 만큼 성장되는데 필요한 시간인 것으로 고려될 수 있다.

Fig. 5와 6에 $1/Da^*$ 가 1인 경우와 $1/Da^*$ 가 180인 각 경우에 대하여 교란의 분포를 도시하였다. Fig. 3에 보이듯이, 전자의 경우는 균질 유체층에 가깝고, 후자는 Darcy의 법칙을 만족하는 다공성 유체층에 가깝다. 교란의 분포는 ζ 값에 대하여 각 교란의 최대치로 그 양을 나눈 상대크기를 나타내고 있다. $\zeta=0$ 그리고 $\zeta \rightarrow \infty$ 에 대하여 본 연구에서 부여한 경계조건인 식 (11)을 잘 만족하고 있다. 그림에서 보면 온도교란은 Da^* 의 변화와는 거의 무관하게 $\zeta=1$, 즉 기본 열침투 깊이가 이내에 한정되어 있고, 속도교란은 Da^* 가 커짐에 따라 가열 경계면 쪽으로, 최대치가 이동함을 알 수 있다. Da^* 의 변화에 대한 자연대류의 임계조건 및 그 조건하의 교란의 분포관계를 Table 1에 나타내었다. 표에서 하첨자 max는 최대치를 의미하며, 하첨자 0.01은 교란량의 99%가 모여 있게 되는 위치를 의미한다. Table 1, Fig. 5와 6에 보이듯이 온도교란의 분

Table 1. Stability conditions under propagation theory

$1/Da^*$	a_c^*	Ra_c^*	ζ value			
			w_{max}^*	θ_{max}^*	$w_{0.01}^*$	$\theta_{0.01}^*$
1×10^{-8}	2.76	7.200×10^5	0.60	0.27	3.00	0.92
1	2.84	7.537×10^5	0.58	0.27	2.87	0.92
20	3.46	1.239×10^6	0.49	0.26	2.12	0.90
40	3.71	1.659×10^6	0.43	0.25	1.93	0.90
80	3.96	2.237×10^6	0.39	0.24	1.78	0.89
180	4.24	4.183×10^6	0.35	0.23	1.64	0.88
300	4.40	6.195×10^6	0.34	0.23	1.58	0.87
∞	4.70	$Ra_{D_c}^* = 1499$	0.32	0.22	1.32	0.86

포는 거의 일정하나, 속도교란의 분포는 Da^* 가 증가할수록 최대치 그리고 1%에 이르는 ζ 의 값이 줄어듦을 알 수 있다. 즉 Prandtl 수가 1보다 큰 유체가 다공성 매질에 포화되어 있는 경우에 속도 경계층 두께가 Darcy 수에 주로 의존하여 존재함이 예상된다. 다공성 매질층에서 자연대류에 의한 유체의 유동이 생기면, 이에 의해 유발되는 속도 경계층 두께를 δ_0 라고 할 때, 열침투깊이 δ 와 δ_0 는 다음과 같은 근사식으로 나타낼 수 있다.

$$\frac{\delta_p}{\delta} = 3.261 \left(1 - \frac{0.056}{Da/\delta^2 + 0.075} \right)^{1/2} \quad (18)$$

위의 식은 오차범위가 2% 이내이다. 식 (18)에 의하면 δ_p 가 δ 보다는 항상 큰 값을 가지므로 $Pr \rightarrow \infty$ 인 유체에 대한 본 연구의 결과에 의하면 합리적인 식이므로 Vafai와 Tien[19]에 의해 제시되었던 가상의 속도 경계면에 대한 해설보다 본 연구의 결과는 어느정도 수치적 양을 가능할 수 있는 자료라 할 수 있다. 이제까지 투과도가 다공성 매질에서의 자연대류에 미치는 영향을 전파이론을 통해 검토하여 보았다. 본문에 나타나 있듯이 전파이론이 갖고 있는 개념은 물리적인 양들을 수치화하는데 합리적인 적용능력을 갖고 있는 것으로 보여진다.

6. 결 론

Brinkman의 운동방정식을 만족하는 다공성 유체층의 밀면을 가열할 때 유발되는 자연대류 임계조건을 이론적으로 예측하였다. 윗면과 아랫면이 모두 고정경계면이고 밀면을 일정시간비율로 가열할 때, deep-pool 계에 대하여 전파이론을 안정성 해석에 적용하였다. 그 결과, 전 Darcy 수에 대한 자연대류 임계시점은 다음과 같이 제시된다.

$$\tau_c = 4.384 \left(1 + 0.542 (\tau_c/Da)^{7/10} \right)^{4/7} Ra^{-2/5}$$

이 결과는 Kaviany의 증폭이론에 의한 예측보다는 4배 정도 차이가 나는데, 이는 무한소의 교란이 가시화 되는데 소요되는 시간으로 보여진다. Darcy 수는 $10^{-4} \leq Da \leq 10^{-2}$ 인 영역에 자연대류 임계시점의 결정에 중요한 역할을 하고 있음을 알았다. 또한 Darcy 수가 감소할수록 열대류에 의해 유발된 속도경계층 깊이가 열침투깊이에 접근함을 알 수 있었다.

감 사

본 연구는 1988년도 서울대학교 대학발전기금 대우

학술연구비의 지원하에 이루어졌습니다. 귀 재단에 감사드립니다.

NOMENCLATURE

- a : dimensionless horizontal wave number
- a* : modified wave number, $a\delta$
- D : differential operator, $d/d\zeta$
- Da : Darcy number, K/L^2
- Da* : modified Darcy number, Da/δ^2
- g : gravity constant [ms^{-2}]
- $H_{\zeta,1}$: unit step function
- i : imaginary number, $\sqrt{-1}$
- K : permeability [m^2]
- L : depth of layer [m]
- p : pressure [Nm^{-2}]
- Pr : Prandtl number, ν/α
- Ra : Rayleigh number, $\phi g \beta L^5 / \nu \alpha^2$
- Ra* : modified Rayleigh number, $Ra\delta^5$
- Ra_D : Darcy-Rayleigh number, $Da \cdot Ra$
- Ra_D^* : modified Darcy-Rayleigh number, $Ra_D \delta^3$
- T : temperature [K]
- t : time [s]
- u : velocity vector
- w : z-component of dimensionless velocity
- x,y,z : dimensionless space coordinates

Greek Letters

- α : effective thermal diffusivity [m^2s^{-1}]
- β : coefficient of thermal expansion [K^{-1}]
- δ : dimensionless thermal penetration depth
- δ_D : dimensionless momentum boundary layer thickness
- ϵ : porosity
- ζ : modified vertical distance, z/δ
- θ : dimensionless perturbed temperature
- μ : dynamic viscosity [$Kgm^{-1}s^{-1}$]
- ν : kinematic viscosity [m^2s^{-1}]
- ρ : density [Kgm^{-3}]
- τ : dimensionless time
- ϕ : temporal rate of heating [Ks^{-1}]

Subscripts

- c : critical value
- i : initial state
- 0 : basic state
- 1 : perturbed state

REFERENCES

1. Slattery, J.C.: Momentum, Energy and Mass

- Transfer in Continua, McGraw-Hill, New York, 402 (1972).
2. Brinkman, H.C.: *Appl. Sci. Res.*, **A1**, 27 (1947).
 3. Combarnous, M.A. and Bories, S.A.: *Adv. Hydros-cience*, **10**, 231 (1975).
 4. Nield, D.A.: *J. Fluid Mech.*, **128**, 37 (1983).
 5. Foster, T.D.: *Physics Fluids*, **8**, 1249 (1965).
 6. Jhaveri, B.S. and Homsy, G.M.: *J. Fluid Mech.*, **114**, 251 (1982).
 7. Wankat, P.C. and Schowalter, W.R.: *Physics Fluids*, **13**, 2448 (1970).
 8. Choi, C.K., Shin, C.B., and Hwang, S.T.: Proc. 8th Int. Heat Transfer Conf. (San Francisco), **3**, 1389 (1986).
 9. Yoo, J.S. and Choi, C.K.: *Korean J. Chem. Eng.*, **4**, 128 (1987).
 10. Choi, C.K. and Yoo, J.S.: Heat Transfer: Korea-U.S.A. Seminar on Thermal Engineering and High Technology, Springer-Verlag, Berlin, 1 (1988).
 11. Yoon, D.Y., Choi, C.K., and Yoo, J.S.: *J. Korean Inst. Chem. Eng.*, **26**, 607 (1988).
 12. Yoon, D.Y. and Choi, C.K.: *Korean J. Chem. Eng.*, **6**, 144 (1989).
 13. Rudraiah, N., Veerappa, B., and Rao, S.B.: Trans. ASME, *J. Heat Transfer*, **102**, 254 (1980).
 14. Walker, K. and Homsy, G.M.: Trans. ASME, *J. Heat Transfer*, **99**, 338 (1977).
 15. Bennett, C.O. and Myers, J.E.: Momentum, Heat and Mass Transfer, 3rd-Ed., McGraw-Hill, New York, 277 (1982).
 16. Howard, L.N.: Proc. 11th Int. Cong. Appl. Mech., Munich, 1109 (1964).
 17. Elder, J.W.: *J. Fluid Mech.*, **32**, 69 (1968).
 18. Kaviany, M.: *Int. J. Heat Mass Transfer*, **27**, 2101 (1984).
 19. Vafai, K. and Tien, C.L.: *Int. J. Heat Mass Trans-fer*, **24**, 195 (1981).