HWAHAK KONGHAK Vol. 23, No. 2, April 1985, pp. 103-108
(Journal of the Korean Institute of Chemical Engineers)

液膜流動의 解析을 위한 自由表面의 境界條件

金永晟* · 張虎男

韓国科学技術院 化学工学科
*韓国動力資源研究所 에너지担當先任部

(1984년 11월 19일 접수, 1984년 12월 17일 채택)

Free Surface Conditions for Steady Film Flows

Young Sung Ghim*, Ho Nam Chang

Dept. Chem. Eng., Korea Advanced Institute of Science & Technology
P. O. Box 131 Dongdaemun, Seoul
**Energy Laboratory, Korea Institute of Energy & Resources*
P. O. Box 339 Daejeon, Chungnam

(Received 19 November 1984; accepted 17 December 1984)

要 約

液膜流動을 비롯하여 自由表面을 수반한 流動의 해석에서 가장 먼저 부딪히는 難点 中의 하나인 自由表面에서의 境界條件을 조사하였다. Tensor의 기본관계식에서 출발하여 二次元 直角좌표계와 三次元 圓筒좌표계 等 具体的 空間 内의 경계조건을 보편적 경로를 거쳐 유도하였다. 특히 定常상태의 경우는, 表面固有의 좌표계를 이용함으로써 보다 간편한 경계조건을 얻을 수 있었다.

Abstract—The first difficulty encountered in dealing with free surface flows is introduction of appropriate boundary conditions at a free surface. The conditions for two-dimensional rectangular coordinates and for three-dimensional cylindrical coordinates are derived using basic tensor relations. Particularly in case of steady flow, the boundary conditions can be simplified through the intrinsic coordinates.

1. 自由表面의 境界條件

서로 섞이지 않는 두 流体가 接함으로써 형성되는 경계면은 유체사이의 힘들이 균형을 이루는 가장 자연스러운 상태에서 결정되며, 固体와 流体의 경계가 固有한 데 反하여 주변상황에 따라 可変的이라는 점에서 '自由表面'이라 일컫는다. 그러나 自由表面 역시 어느 정도 일정한 형태를 가정할 때 고려의 対象이 될 수 있는 만큼, 相互間의 分子운동이 충분히 활발한 기체·기체경계보다는 보통 기체·액체 혹은 액체·액체 경계를 생각하게 된다. 本 연구에서는 이 둘 中 前者만을 다루고자 하는데, 気体相에서는 剪斷応力 및 壓力을 무시할 수 있어 記号가 간편하여 짐에도 자유표면의 특성을 살피는데 부족함이 없기 때문이다.

本考에서는 먼저 液膜형태의 流動 解析에 많이 쓰이는 二次元 直角좌표계(rectangular coordinates)와 三次元 圓筒좌표계(cylindrical coordinates) 를 대표적인 例로 하여, 운동량保存 및 質量保存을 나

타내는 기본 tensor式에서 구체적 경계조건을 유도하는 과정을 알아본다. Whitaker〔1〕. Duda & Vrentas〔2〕를 비롯하여 Ruschak〔3〕의 論文에서 비슷한 서술을 발견할 수 있으나, 중간과정이 명확하지 않거나 記号가 특이한 等 불안전하다고 생각되어 보다 보편적인 경로를 거쳐 詳述하고자 한다. 특히 定常상태의 流動에서는 表面固有의 좌표계를 이용함으로써 좀 더 간편한 형태의 경계조건을 유도할 수 있는데, 액막유동의 해석에서 가장 힘든 점의 하나가 복잡한 경계조건의 처리임을 감안한다면, 간단한 경계조건은 출발부터가 그만큼 유리하여짐을 뜻하게 된다.

自由表面의 구체적 경계조건은 Handbuch der Physik〔4〕에서 教本〔5〕에 이르기까지, 다양한 종류의 문헌에서 다양한 필요에 의하여 表示되어 있으나 서로 相沖되는 부분도 적지 않아 이에 대한 검토도 아울러 행하고자 한다.

2. 基本 관계식

表面유체의 運動방정식도 大量유체(bulk fluid)의 경우와 동일한 원리下에 유도될 수 있으나, 自由表面은 大量유체와는 달리 Euclidean空間이 아니기 때문에 처음부터 tensor관계식에 의존하지 않으면 아니된다. 만일 유체의 表面밀도가 충분히 작다면 物質収支로부터 자유표면의 流動조건은〔6,7〕,

$$\dot{y}^i n_i = v^i n_i \tag{1}$$

로 표시되며, 定常상태에서는

$$v^i n_i = 0 \tag{2}$$

가 되어 表面에 수직한 방향으로 유체의 이동이 없음을 뜻하게 된다.

表面유체의 일반적인 운동방정식에는 표면밀도 外에도 膨脹표면점도(dilational surface viscosity), 剪斷표면점도(shear surface viscosity), 표면장력등의 열역학적 물성치들이 포함된다〔8〕. 그러나 부분적 환경변화가 없는 균일유체의 표면은 질량이 없을 뿐 아니라, 점성도 없고 표면장력도 일정하다고 보는 것이 보통이므로 이들 조건下에서 運動量収支로부터 얻을 수 있는 応力條件을 살펴보면,

$$pn^i - \tau^{ij} n_j + n^i 2H\sigma = 0 \tag{3}$$

(3)式은 정지상태의 자유표면을 나타내는 Young & Laplace式에 유체의 움직임에 의한 粘性마찰의 영향이 추가된 것이다. (3)式을 표면에 대하여 수직과 수평성분으로 분리하면,

$$p - \tau^{ij} n_i n_j + 2H\sigma = 0 \tag{4}$$

$$g_{ik} x^k_\alpha \tau^{ij} n_j = 0 \tag{5}$$

(3)式은 Landau & Lifshitz〔9〕의 (60. 13)式과, (4), (5)式은 Batchelor〔10〕의 (3.3.19)와 (3.3.20)式과 근본적으로 동일하다.

(1)-(5)式의 添字 中 Latin文字는 변수가 空間좌표에 속해 있음을, Greek文字는 表面좌표에 속해 있음을 나타낸다. 이때의 표면은 수학적 혹은 기하학적 표면을 의미하는데, 삼차원 공간을 생각한다면 이차원 표면이, 이차원 공간을 생각한다면 일차원 표면이 성립된다.

(1)-(5)式은 몇가지 기본적인 tensor관계식에 의하여 物理的 의미를 가진 直交좌표계 (orthogonal coordinates)로 변환할 수 있다〔11, 12〕. 먼저, 표면좌표계의 metric tensor를 살펴보면,

$$a_{\alpha\beta} = g_{ij} x^i_\alpha x^j_\beta \tag{6}$$

이때 g_{ij}는 空間의 metric tensor이며, x^i_α는 공간좌표계와 표면좌표계를 연결시켜주는 특수 tensor로

$$x^i_\alpha = \frac{\partial y^i}{\partial \xi^\alpha} \tag{7}$$

와 같이 정의되는데, y^i와 ξ^α는 각기 공간좌표와 표면좌표로써 삼차원 공간의 경우 $i=1, 2, 3$, $\alpha=1, 2$로 변화한다.

(7)式을 이용하여 垂直 vector n_i를 표시하면,

$$n_i = \frac{1}{2} \varepsilon^{\alpha\beta} \varepsilon_{ijk} x^j_\alpha x^k_\beta \tag{8}$$

順列기호(permutation symbol)를 풀어 정리하면,

$$n_i = \left(\frac{g}{a}\right)^{\frac{1}{2}} (x^j_\alpha x^k_\beta - x^j_\beta x^k_\alpha) \tag{9}$$

여기서 a와 g는 각기 metric tensor의 determinant를 나타낸다. Metric tensor의 $a_{\alpha\beta}$가 표면의 水平방향의 특성을 규정지어 주는데 反하여 垂直방향의 특성을 보여주는 것으로서는,

$$b_{\alpha\beta} = x^i_{\alpha,\beta} n_i$$

$$= \left[\frac{\partial^2 y^i}{\partial \xi^\alpha \partial \xi^\beta} + \left\{ {i \atop j\,k} \right\} x^j_\alpha x^k_\beta\right] n_i \tag{10}$$

(6)式과 (10)式을 利用하면 표면의 평균曲率 H는 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$2H = a^{\alpha\beta} b_{\alpha\beta} \tag{11}$$

(6)-(11)의 관계식을 (1)-(5)式에 대입함으로써 원

하는 直交좌표계의 自由表面에서의 경계조건을 얻을 수 있다. 그러나 이때 유의하여야 할 점은 (1)−(5)式의 v^i 및 τ^{ij}가 통상의 물리적 次元을 갖지 않는 수학적 의미의 vector 및 tensor라는 사실이다. 이를 물리적 의미를 지닌 성분으로 표시하면,

$$\tau^{ij}=\frac{\tau\,(ij)}{h_i h_j} \tag{12}$$

$$v^i=\frac{v\,(i)}{h_i} \tag{13}$$

여기서 h_i는 scale factor로써, 直交 좌표계에서는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$h_i=(g_{ii})^{\frac{1}{2}} \qquad \text{(no summation)} \tag{14}$$

3. 具体的 空間内의 境界條件

(1) 二次元 直角좌표계의 境界條件

공간좌표계의 y^1, y^2, y^3를 각기 直角좌표계의 x, y, z에 대응시키고, 표면좌표계의 ξ^1, ξ^2를 Fig.1과 같이 취한다.

$$\begin{aligned}\xi^1&=y^3=z\\ \xi^2&=y^1=x\end{aligned} \tag{15}$$

大量流体의 流動특성이 z방향으로는 변하지 않는 x, y의 이차원 유동을 생각하면, 直角좌표계의 자유표면 h는,

$$y=h(x,\ t)\ \text{or}\ y^2=h(\xi^2,\ t) \tag{16}$$

(15)式과 (16)式을 이용하여 x^i_α를 계산한 후 (6)式에서 $a_{\alpha\beta}$와 (9)式으로부터 n_i를 각기 구하고, (10)式과 (11)式에서 $b_{\alpha\beta}$와 曲率 H를 얻을 수 있다. (1)式으로부터 流動條件은,

$$\frac{\partial h}{\partial t}=-\frac{\partial h}{\partial x}u+v \tag{17}$$

直角좌표계에서는 모든 scale factor가 1이므로 (4), (5)式은 그대로 유효하게 되어,

$$p-\frac{1}{a}\{(\frac{\partial h}{\partial x})^2\tau_{xx}-2\frac{\partial h}{\partial x}\tau_{xy}+\tau_{yy}\}+2H\sigma=0 \tag{18}$$

$$\frac{\partial h}{\partial x}(\tau_{xx}-\tau_{yy})-\{1-(\frac{\partial h}{\partial x})^2\}\tau_{xy}=0 \tag{19}$$

그러나 Esmail & Hummel [13]과 Higgins等[14, 15]은 (18)의 垂直성분에 (19)의 水平성분을 결합시켜 간편한 형태의 垂直応力條件을 얻고 있다.

$$p-\tau_{yy}+\frac{\partial h}{\partial x}\tau_{xy}+2H\sigma=0 \tag{20}$$

비압축성 Newtonian 유체의 경우, (20)과 (19)式의 剪斷応力을 속도성분으로 치환하면 최종적으로 얻을 수 있는 応力조건은,

$$p-2\mu\frac{\partial v}{\partial y}+\mu\frac{\partial h}{\partial x}(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x})+2H\sigma=0 \tag{21}$$

$$4\frac{\partial h}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}-\{1-(\frac{\partial h}{\partial x})^2\}(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x})=0 \tag{22}$$

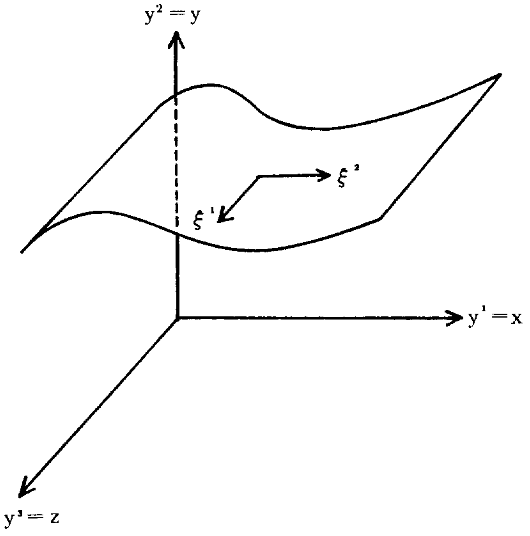

Fig. 1. Film flow in two-dimensional rectangular coordinates.

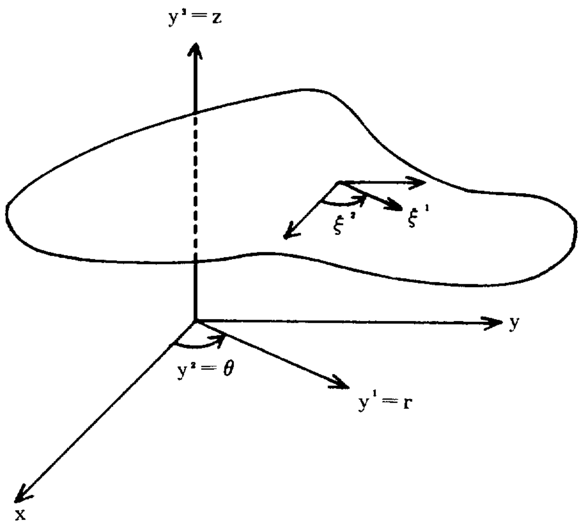

Fig. 2. Film flow in three-dimensional cylindrical coordinates.

(2) 三次元 圓筒좌표계의 境界條件

공간좌표계의 y^1, y^2, y^3를 圓筒좌표계의 r, θ, z에 대응시키고, 표면좌표계의 ξ^1, ξ^2를 Fig. 2 와 같이 취한다.

$$\begin{aligned} \xi^1 &= y^1 = r \\ \xi^2 &= y^2 = \theta \end{aligned} \tag{23}$$

自由表面 h는,

$$z = h(r, \theta, t) \text{ or } y^3 = h(\xi^1, \xi^2, t) \tag{24}$$

直角좌표계와 同一한 순서에 의하여 各 項을 계산하면 (1)式의 流動條件은,

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -\frac{\partial h}{\partial r}u - \frac{\partial h}{\partial \theta}\frac{v}{r} + w \tag{25}$$

(4) 와 (5)式의 応力條件은,

$$p - \tau_{zz} + \frac{\partial h}{\partial r}\tau_{rz} + \frac{1}{r}\frac{\partial h}{\partial \theta}\tau_{\theta z} + 2H\sigma = 0 \tag{26}$$

$$\frac{\partial h}{\partial r}(\tau_{zz} - \tau_{rr}) - \frac{1}{r}\frac{\partial h}{\partial \theta}(\tau_{r\theta} + \frac{\partial h}{\partial r}\tau_{z\theta}) + \{1 - (\frac{\partial h}{\partial r})^2\}\tau_{rz} = 0 \tag{27}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial h}{\partial \theta}(\tau_{zz} - \tau_{\theta\theta}) - \frac{\partial h}{\partial r}(\tau_{r\theta} + \frac{1}{r}\frac{\partial h}{\partial \theta}\tau_{zr}) + \{1 - (\frac{1}{r}\frac{\partial h}{\partial \theta})^2\}\tau_{\theta z} = 0 \tag{28}$$

二次元 流動과는 달리, 三次元 流動에서는 水平方向의 応力조건이 (27)과 (28)로 나뉘어져 각기 r 및 θ 방향의 水平応力 조건을 나타내고 있다. 역시 비압축성 Newtonian流体에 대하여 剪斷応力을 속도성분으로 표시하면,

$$p - 2\mu\frac{\partial w}{\partial z} + \mu\frac{\partial h}{\partial r}(\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z}) + \frac{\mu}{r}\frac{\partial h}{\partial \theta}(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial \theta}) + 2H\sigma = 0 \tag{29}$$

$$2\frac{\partial h}{\partial r}(\frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial r}) - \frac{1}{r}\frac{\partial h}{\partial \theta}\{r\frac{\partial}{\partial r}(\frac{v}{r}) + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial h}{\partial r}(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial \theta})\} + \{1 - (\frac{\partial h}{\partial r})^2\}(\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z}) = 0 \tag{30}$$

$$\frac{2}{r}\frac{\partial h}{\partial \theta}(\frac{\partial w}{\partial z} - \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{u}{r}) - \frac{\partial h}{\partial r}\{r\frac{\partial}{\partial r}(\frac{v}{r}) + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{1}{r}\frac{\partial h}{\partial \theta}(\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z})\} + \{1 - (\frac{1}{r}\frac{\partial h}{\partial \theta})^2\}(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial \theta}) = 0 \tag{31}$$

(29)-(30)의 式들은 (24)에서 보는 바와 같이 圓筒의 軸방향으로 자유표면이 형성될 때의 경계조건을 나타내고 있다. 이같은 流動은 주로 圓盤위의 자유표면을 다룰 때 많이 등장하며, 만일 圓筒을 이용한 roll coating등의 문제라면 표면좌표계를 재배치하여 자유표면이 $r=h(\theta, z, t)$의 형태로 표시되도록 하여야 할 것이다. 또 하나의 가능성으로는 $\theta=h(r, z, t)$로 자유표면이 주어지는 경우를 생각할 수 있는데, 記号의 복잡성만 극복할 수 있다면 後者의 두 경우에 대하여서는 Ruschak [3]을 참조할 수 있다.

4. 表面固有의 좌표계를 통한 定常상태의 境界條件

定常상태의 流動조건 (2) 및 応力조건 (4), (5) 에는 각기 표면에 대한 垂直, 水平방향의 投影項이 포함되어 있어, 다음과 같이 간편하게 표기할 수 있다.

$$v_n = 0 \tag{32}$$

$$p - \tau_{nn} + \varkappa_s\sigma = 0 \tag{33}$$

$$\tau_{ns} = 0 \tag{34}$$

(32)-(34)의 n, s는 각기 표면에 대하여 垂直 및 水平방향의 좌표축을 나타내며 (Fig.3), 평균 曲率 2H는 水平方向의 曲率이라는 의미에서 $\varkappa_s$로 표시하였다. n, s좌표계는 표면이 속한 공간이 아닌, 표면 固有의 관점에서 본 좌표계라 하여 '固有좌표계' 라 부르는데 [12], 直角좌표계와의 관계는,

$$\begin{aligned} \vec{n} &= -\vec{i}\sin\theta + \vec{j}\cos\theta \\ \vec{t} &= \vec{i}\cos\theta + \vec{j}\sin\theta \end{aligned} \tag{35}$$

이때,

$$\tan\theta = h' = \frac{dh}{dx} \tag{36}$$

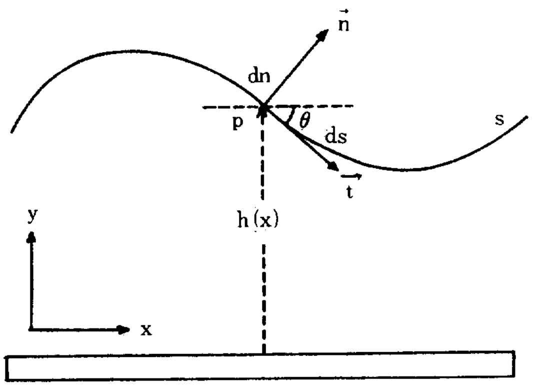

Fig. 3. Steady film flow in intrinsic coordinates.

(36)式의 결과는 二次元 定常상태만을 고려 하여 (16)式에서 表面을 y=h(x)로 표시한 때문이며, 보다 일반적인 경우도 tensor관계를 이용하여 유도할 수 있다.

지금까지 문헌에 나타난 대부분의 경계조건은 3-(2)節의 圓筒좌표계보다는 (1)節의 直角 좌표계를 대상으로 하고 있으며, 그들의 경계조건을 유도하는 방식도 tensor관계식보다는 (32)-(34)의 固有좌표계에서 출발하여 주로 좌표축의 기하학적 관계에 의존하고 있다. 그러나 이때 유의하여야 할 점은 Fig. 3에서 볼 수 있는 바와 같이 曲面의 경우, 주어진 점 p에서의 固有좌표계는 直角좌표계의 성질을 지니나 전체적으로는 直角좌표계가 아니라는 사실이다. 따라서 剪斷應力의 속도성분 역시 直角좌표계와는 다르게 되는데,

$$\vec{v}=v_n\vec{n}+v_s\vec{t} \tag{37}$$

로 표시할 수 있으므로, Newtonian流体에 대하여 속도성분을 조사하여 보면,

$$\begin{aligned}\tau_{nn}&=2\mu\left(\frac{\partial v_n}{\partial n}+v_s\kappa_n\right)\\ \tau_{ss}&=2\mu\left(\frac{\partial v_s}{\partial s}-v_n\kappa_s\right)\\ \tau_{ns}&=\mu\left(\frac{\partial v_s}{\partial n}+\frac{\partial v_n}{\partial s}+v_s\kappa_s-v_n\kappa_n\right)\end{aligned} \tag{38}$$

여기서,

$$\kappa_s=\frac{\partial\theta}{\partial s}\quad\text{and}\quad\kappa_n=\frac{\partial\theta}{\partial n} \tag{39}$$

(38)式은 固有좌표계의 일반관계식으로, 連續방정식과 運動방정식을 포함한 보다 상세한 설명은 Milne-Thomson[16]을 참조할 수 있다. (37)式에 定常상태의 流動조건 (32)를 적용하면,

$$\vec{v}=v_s\vec{t} \tag{40}$$

(38)式은,

$$\begin{aligned}&\tau_{nn}=2\mu\, v_s\kappa_n,\quad \tau_{ss}=2\mu\frac{\partial v_s}{\partial s}\\ &\tau_{ns}=\mu\left(\frac{\partial v_s}{\partial n}+v_s\kappa_s\right)\end{aligned} \tag{41}$$

(41)式은 定常상태의 固有좌표계에서 유도된 剪斷應力의 속도성분에 관한 최종 결과식으로 Higgins & Scriven[15]의 (3.20)式과는 근본적으로 동일하다.

(41)式을 (33)과 (34)式에 대입하면 定常상태 Newtonian流体에서의 應力조건을 얻을 수 있다. 그러나 (38)과 (41)式들을 보면 지금까지 발표된, 固有좌표계를 통하여 유도된 경계조건들에 다소간 문제가 있음을 알 수 있다. 예를 들어, Levich & Krylov[17]는 출발부분의 (3), (4)式들이 잘못 표현됨으로써 論文에 서술된 많은 훌륭한 논의에도 불구하고 (27), (28), (28a)式 等에 필요없는 項들이 추가되어 있다. Coyne & Elrod[18]과 Williamson[19]은 固有좌표계의 全体的 曲率을 충분히 고려하지 못하고 있으며, Lee & Tallmadge[20]는 固有좌표계를 直角좌표계와 동일하게 취급함으로 말미암아 상당한 오류를 범하고 있다.

먼저 定常상태의 流動조건 (32)를 直角좌표계로써 표시하면,

$$uh'=v \tag{42}$$

일반관계식인 (17)式과 비교하여 時間에 대한 미분항이 없어지고 있다. (33), (34)式을 (41)式과 결합한 후, (35), (36)관계식을 이용하여 直角좌표계에서의 應力조건을 구하면,

$$p+\frac{2}{a}\mu h'h''u+\kappa_s\sigma=0 \tag{43}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}+2h'\frac{\partial v}{\partial y}-h'^2\frac{\partial v}{\partial x}+h''u=0 \tag{44}$$

(43)式도 간단하기는 하나, 이에 값이 零인 v_n의 垂直 微分項을 더해주고 (44)式과 결합하면 다음과 같이 有用한 형태로 만들 수 있다.

$$p-\mu\frac{\partial v}{\partial y}+\mu h'\frac{\partial v}{\partial x}+\kappa_s\sigma=0 \tag{45}$$

(21), (22)의 應力조건에 비하여 (45), (44)의 應力조건이 간단하여 진것은 固有좌표계를 통하여 유도하는 과정에서 定常상태의 流動조건인 (32)式을 충분히 이용할 수 있었기 때문이다. 表面에서 발생하는 波動 等 非定常상태를 해석하고자 할 때에는 前者의 조건을 사용할 수 밖에 없으나, 定常상태의 自由表面을 다루는 문제라면 後者를 취함으로써 그만큼 유리한 입장에서 출발할 수 있게 된다.

NOMENCLATURE

a	:	determinant of surface metric tensor
$a_{\alpha\beta}$	:	surface metric tensor
$b_{\alpha\beta}$	:	second fundamental tensor of the surface
g	:	determinant of space metric tensor
g_{ij}	:	metric tensor in space
H	:	mean curvature of the surface

h	:	position of free surface
h_i	:	scale factor
$\vec{i}$	:	unit vector in x direction
$\vec{j}$	:	unit vector in y direction
n	:	coordinate normal to the surface, m
$\vec{n}$	:	unit vector in n direction
n^i	:	unit vector normal to the surface
p	:	pressure, N/m^2
r	:	radial coordinate, m
s	:	coordinate tangential to the surface, m
t	:	time, sec
$\vec{t}$	:	unit vector in s direction
u	:	velocity in x or r direction, m/sec
v	:	velocity in y or θ direction, m/sec
v^i	:	velocity component in space
v(i)	:	physical component of velocity, m/sec
w	:	velocity in z direction, m/sec
x	:	coordinate along the solid surface, m
x^i_α	:	hybrid tensor associating spatial and surface tensors
y	:	coordinate normal to the surface, m
y^i	:	space coordinate
z	:	axial coordinate, m
$\varepsilon^{\alpha\beta}$	:	ε-tensor for the surface
ε_{ijk}	:	ε-tensor for the space
θ	:	azimuthal coordinate; angle between $\vec{i}$ and $\vec{j}$
κ_n	:	curvature in n direction
κ_s	:	curvature in s direction
μ	:	viscosity, Kg/m·sec
ξ^α	:	surface coordinate
σ	:	surface tension, N/m
τ^{ij}	:	viscous stress tensor
τ(ij)	:	physical component of viscous stress tensor, N/m^2
′	:	x derivative
•	:	time derivative

REFERENCES

1. Whitaker, S.: Ind. Eng. Chem. Fundam., 5, 379 (1966).
2. Duda, J.L. and Vrentas, J.S.: Chem. Eng. Sci., **22**, 855 (1967).
3. Ruschak, K.J. : Ph. D. Dissertation, Univ. Minnesota, U.S.A. (1974).
4. Wehausen, J.V. and Laitone, E.V.: Handbuch der Physik, vol. IX, p.446, Springer-Verlag, Berlin (1960).
5. Neyfeh, A.H.: Perturbation Methods, p. 40, Wiley, N.Y. (1973).
6. Scriven, L.E. : Chem. Eng. Sci., **12**, 98 (1960).
7. Slattery, J.C. : Chem. Eng. Sci., **19**, 379 (1964).
8. Quinn, J.A. and Scriven, L.E.: Interfacial Phenomena, 14th Adv. Seminar, AIChE, N.Y. (1970).
9. Landau, L.D. and Lifshitz, E.M.: Fluid Mechanics, English Edn, p. 234, Pergamon, Oxford (1959).
10. Batchelor, G.K.: An Introduction to Fluid Dynamics, p. 150, Cambridge Univ. Press (1967).
11. Aris, A.: Vectors, Tensors, and the Basic Equations of Fluid Mechanics, chap. 9, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J. (1962).
12. Sokolnikoff, I.S.: Tensor Analysis, 2nd Edn, chap.3, Wiley, N.Y. (1964).
13. Esmail, M.N. and Hummel, R.L.: AIChE J., **21**, 958 (1975).
14. Higgins, B.G., Silliman, W.J., Brown, R.A. and Scriven, L.E.: Ind. Eng. Chem. Fundam. **16**, 393 (1977).
15. Higgins, B.G. and Scriven, L.E.: Ind. Eng. Chem. Fundam., **18**, 208 (1979).
16. Milne-Thomson, L.M.: Theoretical Hydrodynamics, 5th Edn, sec. 21.39, Macmillan, London (1968).
17. Levich, V.G. and Krylov, V.S.: Ann. Rev. Fluid Mech., **1**, 293 (1969).
18. Coyne, J.C. and Elrod, H.G., Jr.: J. Lubric. Tech., Trans ASME, 92, 451 (1970).
19. Williamson, A.S.: J. Fluid Mech., **52**, 639 (1972).
20. Lee, C.Y. and Tallmadge, J.A.: Ind. Eng. Chem. Fundam., **15**, 258 (1976).