

두 수평면 사이에서의 Poiseuille 유동의 열적 불안정성

여 영 구·최 창 균
 서울대학교 공과대학 화학공학과
 (접수 1981. 12. 31)

Thermal Instability in a Plane Poiseuille Flow

Yeong Koo Yeo and C.K. Choi
 Department of Chemical Engineering, College of Engineering,
 Seoul National University, Seoul 151, Korea

(Received; December 31, 1981)

요 약

본 연구에서는 서로 평행한 두 수평판 사이를 흐르는 Poiseuille 종류의 밀면이 일정한 온도로 유지되는 경우에 있어서의 유체의 열적 불안정성을 조사하였다. 열 경계층 두께와 경계면의 온도 기울기를 이용하여 모사한 기본 온도분포는 해석적으로 구한 온도분포와 잘 일치하고 있음이 확인되었다. 이를 이용하여 Prandtl 수와 Peclet 수가 무한히 큰 경우의 유체의 불안정성에 대하여 해석한 결과 자연대류 발생시의 열적 교란이 열 경계층 내에 국한된다는 수정된 개념의 타당성을 확인할 수 있었다.

ABSTRACT

The theoretical analysis of thermal instabilities of a horizontal fluid layer in plane Poiseuille flow was investigated. The unperturbed basic temperature profile was approximated, using the thermal boundary layer thickness and the wall temperature gradient. The results agreed reasonably well with the exact solutions. Applying this modified temperature profile, the conditions marking the onset of instability due to buoyant forces were obtained for large Prandtl number and Peclet number. The present theory was found to produce the result consistent with those of the extant experiments. The validity of the modified concept that thermal disturbances are confined within the effective thermal depth was confirmed.

1. 서 론

서로 평행한 두 수평판 사이를 흐르는 유체를 하부로부터 가열하면 유체층 내의 상하 온도차로 인하여 유체층은 불안정하게 된다. 이러한 유체의 열적 불안정성은 이미 과거부터 광범위하게 연구되어 오고 있으며 열 교환기, 대기층의 유동, 공해문제, 그리고 난류의 근원을 밝히는 문제등 그 응용범위가 넓다.

평행한 두 수평판 사이를 흐르는 Poiseuille 층류에 있어서 부력에 기인하는 흐름방향으로의 roll의 형성에 관한 문제에 대하여 경계면의 온도가 선형적으로 변하는 경우는 Nakayama, Hwang 및 Cheng,¹⁾ 그리고 하부 평판의 온도가 일정한 경우는 Hwang과 Cheng²⁾들이 이론적으로 연구를 행한 바 있다. 또한 Cheng과 Wu^{3,4)}는 점도 및 밀도가 유체의 안정성에 미치는 영향에 대해서 해석하였다. 아울러 유체를 공기로 하여 행한 몇가지 실험 결과들이 발표되어 있다.^{5~8)}

이러한 계에서의 열적 불안정성을 특징지워 주는 roll의 형성에 관한 문제는 유체 내의 기본 온도분포가 비선형으로 되기 때문에 그에 대한 이론적인 해석이 어렵게 된다. 최근에 Davis와 Choi⁹⁾는 유체의 열적 불안정성이 유체층 내의 열 경계층 내에 국한된다는 수정된 개념을 발표한 바 있으며 Kim과 Choi¹⁰⁾는 정지된 유체층에서의 자연대류 현상에 관한 연구에서 그러한 수정된 개념의 타당성을 확인한 바 있다.

본 연구에서는 이러한 수정된 개념을 도입하여 수평면상의 Poiseuille 층류에 대해서 하부 평판이 일정 온도로 유지되는 경우 유체가 보이는 열적 불안정성에 대한 이론적인 해석을 시도하였으며 곁하여 그 결과를 발표되어 있는 기존의 이론 및 실험결과들과 비교 검토하여 보았다.

2. 기본 식

2-1. 기본계의 설정

수평면 상의 Poiseuille 층류에서 하부 평판이 일정 온도로 유지될 경우 유체층 내의 온도차가 어느 임계값 이상이 되면 자연대류가 발생하게 된다. 이러한 경우 어느 위치에서 자연대류의 발생이 시작되는가 하는 문제가 대두하게 된다. 본 연구에서 다루고 있는 계는 Fig. 1에 상세히 나타나 있다.

본 연구의 해석에 있어서 유체는 Newton성 유체이고 외력항에서의 밀도를 제외한 다른 물리적 성질들은 온도변화에 무관하다는 Boussinesq가정이 성립된다고 가정하였다. 또한 두 수평판으로 이루어지는 상하 경계면에서는 no-slip 조건이 적용되며 유체층의 폭은 무한히 크다고 보았다.

2-2. 기본 온도분포

Fig. 1에서 $X \leq 0$ 인 범위에서는 유체의 온도는 일정하며 상하 경계면의 온도 T_1 과 같다. $X = 0$ 인 지점에서 하부 평판의 온도가 T_2 로 급격히 증가한 뒤 그 온도로 일정하게 유지된다. 이 경우의 기본 온도 및 기본 속도분포는 다음과 같이 무차원화된 식으로 나타낼 수 있다.

$$6(z - z^2) \frac{\partial \phi_0}{\partial x} = \frac{\partial^2 \phi_0}{\partial z^2} + \frac{1}{P_e^2} \frac{\partial^2 \phi_0}{\partial x^2} \quad (1)$$

$$\phi_u = 6(z - z^2) \quad (2)$$

여기에서 $(x, y, z) = \left(\frac{X}{h}, Y, Z \right)$, $\phi_0 =$

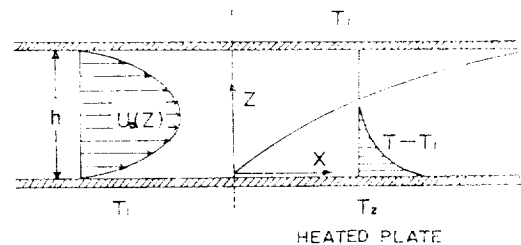


Fig. 1. Schematic Diagram of the System

$\frac{T - T_1}{T_2 - T_1}$, $\phi_u = \frac{U_0}{U_m}$ 이다. 경계조건은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} B.C.'s: \phi_\theta(x, 0) &= 1 \\ \phi_\theta(x, 1) &= 0 \\ \phi_\theta(\infty, z) &= 1 - z \\ \phi_\theta(0, z) &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

위의 온도분포식은 변수분리 방법에 의해 해결할 수 있다. 이러한 고전적인 Graetz 문제에 대해서는 지금까지 많은 연구가 이루어져 왔으며 특히 Davis¹¹⁾는 많은 대류 및 확산 문제들이 융합 기하급수 함수를 이용하여 해결될 수 있음을 보였다. 이를 이용하면 (1)식의 해는 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned} \phi_\theta &= 1 - z + \sum_{n=1}^{\infty} A_n R_n(z) \exp(-\alpha_n^2 x) \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} B_n S_n(z) \exp(-\beta_n^2 x) \end{aligned} \quad (4)$$

여기에서 α_n 과 β_n 는 각각 even 및 odd eigenvalue 들이며 $R_n(z)$ 와 $S_n(z)$ 는 다음과 같이 융합 기하급수로 표시되는 함수이다.

$$R_n(z) = \exp\left(-\frac{r}{2}\right) M\left(a, \frac{1}{2}, r\right) \quad (5)$$

$$S_n(z) = \exp\left(-\frac{s}{2}\right) s^{1/2} M\left(b, \frac{3}{2}, s\right)$$

위에서 M 은 융합 기하급수 함수이며 a, b, r , 그리고 s 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{4} - \left(1 + \frac{2}{3} \frac{\alpha_n^2}{P_e^2}\right) \frac{\sqrt{6}}{16} \alpha_n \\ b &= \frac{3}{4} - \left(1 + \frac{2}{3} \frac{\beta_n^2}{P_e^2}\right) \frac{\sqrt{6}}{16} \beta_n \\ r &= \sqrt{6} \alpha_n \left(z - \frac{1}{2}\right)^2 \\ s &= \sqrt{6} \beta_n \left(z - \frac{1}{2}\right)^2 \end{aligned}$$

eigen 상수 A_n 과 B_n 은 초기조건을 이용하여 통상의 방법으로 구할 수 있다. n 이 6 까지의 eigen values 및 eigen 상수들을 Table 1에 나타내었는데 이들은 Hwang과 Cheng²⁾이 다른 방법으로 구한 값들과 잘 일치하고 있다. Poiseuille 층류에서의 이와같은 전개방법은 본 연구에서 처음으로 밝혀진 것이다.

x 가 0.01 이하의 작은 범위에서는 속도 분포를 선형으로 가정하고 다음과 같은 새로운 변수 η 를 도입하여 Leveque 해를 얻을 수 있다.

$$\eta = \frac{z}{\sqrt{1.5x}} \quad (6)$$

Table 1. Calculated Values for A_n , B_n , α_n^2 and β_n^2

$P_e = \infty$					$P_e = 100$		
n	α_n^2	β_n^2	A_n	B_n	n	α_n^2	β_n^2
1	7.5407	33.9619	-0.6004	-0.4815	1	7.5364	34.8002
2	85.7263	156.8285	0.1496	0.2928	2	85.0366	153.9193
3	249.2666	363.0397	-0.0804	-0.2211	3	243.2536	349.3363
4	498.1471	654.5886	0.0537	0.1815	4	474.4886	613.2552
5	832.3640	1031.4728	-0.0398	-0.1560	5	768.9035	935.2728
6	1251.9156	1493.6911	0.0314	0.1378	6	1116.2167	1034.7238

$P_e = 50$			$P_e = 20$		
n	α_n^2	β_n^2	n	α_n^2	β_n^2
1	7.6193	35.5110	1	7.4355	32.7347
2	83.0911	147.5525	2	72.9905	119.5064
3	228.1030	319.2343	3	173.0482	228.1921
4	422.9620	533.5762	4	285.1900	337.3893
5	533.5763	650.8550	5	402.3779	461.7084
6	772.4992	900.4038	6	522.1981	581.6794

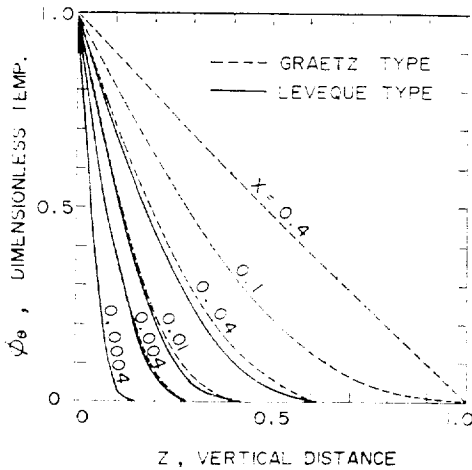


Fig. 2. Exact Temperature Profile

$$\phi_0 = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}, \eta^3\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)} \quad (7)$$

이들 온도분포를 Fig. 2에 도시하였다.

2-3. 기본식

본 연구의 해석에 이용되는 식들은 잘 알려져 있는 Navier-Stokes 식, energy 식, 그리고 연속 및 상태 방정식 들이다. 이러한 식들에 다음과 같은 극히 작은 교란(perturbations)을 도입하게 된다.

$$U = U_0 + u', \quad V = v', \quad W = w' \quad (8)$$

$$T = T_0 + \theta', \quad P = P_0 + p'$$

위에서 첨자 "0"은 자연대류가 발생되기 이전의 상태를 의미한다. 이들을 무차원화 시켜서 앞의 식들에 대입하면 다음과 같은 무차원화된 기본식들을 얻게 된다.

$$R_e \left(\phi_u \frac{\partial u}{\partial \bar{x}} + w \frac{\partial \phi_u}{\partial z} \right) = - \frac{\partial p}{\partial \bar{x}} + \nabla^2 u \quad (9)$$

$$R_e \left(\phi_u \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \nabla^2 w + \frac{\partial^2 \phi_u}{\partial z^2} \frac{\partial w}{\partial \bar{x}} \right) = \nabla^2 \nabla^2 w + G_r \left(\frac{\partial^2}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \theta \quad (10)$$

$$Pr \left(R_e \phi_u \frac{\partial \theta}{\partial \bar{x}} + u \frac{\partial \phi_\theta}{\partial \bar{x}} + w \frac{\partial \phi_\theta}{\partial z} \right) = \nabla^2 \theta \quad (11)$$

$x - y$ 평면상의 교란들은 파수(wave number)

a 를 이용하여 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$(u, w, \theta, p) = (R_e u^*(z), w^*(z), P_r \theta^*(z), p^*(z)) \exp(c\bar{x} + iay) \quad (12)$$

불안정성이 시작되는 순간에는 $c = 0$ 이라는 가정하에 (9)~(11)식들은 다음과 같이 변형시킬 수 있다.

$$(D^2 - a^2)^2 w^* = a^2 R_e \theta^* \quad (13)$$

$$(D^2 - a^2) u^* = w^* \frac{\partial \phi_u}{\partial z} \quad (14)$$

$$(D^2 - a^2) \theta^* = \frac{u^*}{P_r} \frac{\partial \phi_\theta}{\partial \bar{x}} + w^* \frac{\partial \phi_\theta}{\partial z} \quad (15)$$

위의 경우에 대한 경계조건들은 다음과 같다.

$$w^* = Dw^* = u^* = \theta^* = 0 \text{ at } z = 0 \text{ and } 1 \quad (16)$$

3. 안정성의 해석

본 연구에서는 일차적으로 P_r 수 및 P_e 수가 무한히 큰 경우를 생각하였다. 그러나 기본 온도분포가 비선형이기 때문에 (13)~(15)식의 이론적인 해석이 극히 어렵게 되므로 본 연구에서는 Davis와 Choi⁹⁾의 수정된 개념을 도입하여 기본 온도분포를 다음과 같이 모사하였다.

$$\phi_\theta = \phi_{\theta w} \left(1 - \frac{z}{\delta} \right)^{-\phi_{\theta w}^{1.5}} \quad (0 \leq z \leq \delta) \quad (17)$$

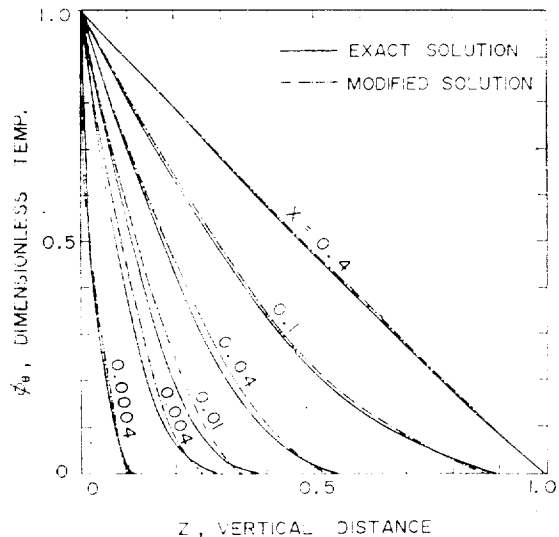


Fig. 3. Comparison between Exact and Modified Temperature Profile

$$\phi_\theta = 0 \quad (\delta \leq z \leq 1) \quad (18)$$

이와 같이 나타낸 기본 온도분포는 Fig. 3에 보인 바와 같이 앞에서 구한 Graetz 형의 해와 잘 일치함을 알 수 있다. 위의 모사 기본 온도 분포식을 (13)~(15)식에 대입하면 다음과 같은 식들이 얻어진다.

$$(D^2 - a^2 \delta^2) u^* = 6(\delta^2 - 2\delta^3 \zeta) w_a^* \quad (19)$$

$$(D^2 - a^2 \delta^2)^3 w_a^* - a^2 \delta^6 R_a \phi_{\theta w}'$$

$$\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \zeta^n \left(\frac{-\delta \phi_{\theta w}'}{i} - 1 \right) \zeta^n \right]$$

$$w_a^* = 0 \quad (20)$$

$$(D^2 - a^2 \delta^2)^2 w_b^* = 0 \quad (21)$$

위에서 $\zeta = \frac{z}{\delta}$, $D = \frac{d}{d\zeta}$ 이며 하첨자 a 는 $z \leq \delta$ 인 범위에서의 변수, b 는 $z \geq \delta$ 인 범위에서의 변수를 나타낸다. $\zeta = 0$ 및 $\zeta = 1/\delta$ 에서의 경계조건은 속도, 온도 및 stress들이 연속이라는 사실로부터 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$w_a^* = w_b^*, \quad D^n w_a^* = D^n w_b^*$$

$$(n = 1, 2, 3, 4) \quad (22)$$

w_a^* 는 다음과 같이 급격히 수렴하는 멱급수 형태를 이용하여 구할 수 있다.

$$W_a^* = \sum_{i=0}^5 H_i f^i(\zeta)$$

$$f^{(i)}(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n^{(i)} \zeta^n \quad (23)$$

여기에서 $b_n^{(i)}$ 는 다음과 같은 관계를 만족시킨다.

$$b_n^{(i)} = \delta_{ni} \text{ for } n = 0, 1, \dots, 5 \quad (24)$$

$$b_n^{(i)} = \frac{1}{n!} [3 \xi^2 b_{n-2}^{(i)} (n-2)!]$$

$$\begin{pmatrix} -\{f^{(2)}(1) + \frac{\xi^2}{6} f^{(4)}(1)\} - f^{(3)}(1) - f^{(5)}(1) & e^{-\xi} & e^{-\xi} & e^{\xi} & e^{\xi} & H_2 \\ -\{f^{(2)'}(1) + \frac{\xi^2}{6} f^{(4)'}(1)\} - f^{(3)'}(1) - f^{(5)'}(1) & -\xi e^{-\xi} & (1-\xi)e^{-\xi} & \xi e^{\xi} & (1+\xi)e^{\xi} & H_3 \\ -\{f^{(2)''}(1) + \frac{\xi^2}{6} f^{(4)''}(1)\} - f^{(3)''}(1) - f^{(5)''}(1) & \xi^2 e^{-\xi} & -\xi(2-\xi)e^{-\xi} & \xi^2 e^{\xi} & \xi(2+\xi)e^{\xi} & H_5 \\ -\{f^{(2)'''}(1) + \frac{\xi^2}{6} f^{(4)'''}(1)\} - f^{(3)'''}(1) - f^{(5)'''}(1) & -\xi^3 e^{-\xi} & \xi^2(3-\xi)e^{-\xi} & \xi^3 e^{\xi} & \xi^2(3+\xi)e^{\xi} & H_6 \\ -\{f^{(2)''''}(1) + \frac{\xi^2}{6} f^{(4)''''}(1)\} - f^{(3)''''}(1) - f^{(5)''''}(1) & \xi^4 e^{-\xi} & -\xi^3(4-\xi)e^{-\xi} & \xi^4 e^{\xi} & \xi^3(4+\xi)e^{\xi} & H_7 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-a} & \frac{1}{\delta} e^{-a} & e^a & \frac{1}{\delta} e^a & H_8 \\ 0 & 0 & 0 & -\xi e^{-a} & (1-a)e^{-a} & \xi e^a & (1+a)e^a & H_9 \end{pmatrix} = 0 \quad (27)$$

$$\begin{aligned} & -3 \xi^4 b_{n-4}^{(i)} (n-4)! \\ & + \xi^6 - R_a \xi^2 \delta^4 b_{n-6}^{(i)} (n-6)! \\ & + R_a \phi_{\theta w}' \xi^2 \delta^4 (n-6)! \\ & \sum_{j=1}^{n-7} (-1)^{n-6-j} \prod_{l=1}^{n-6-j} \left(\frac{-\delta \phi_{\theta w}'}{l} \right. \\ & \left. - 1 \right) b_j^{(i)} \quad \text{for } n \geq 6 \end{aligned} \quad (25)$$

위에서 ξ 는 $a\delta$ 이다. 한편 w_b^* 는 (21)식으로부터 다음과 같이 얻어진다.

$$W_b^* = (H_6 + H_7 \zeta) e^{-\xi} + (H_8 + H_9 \zeta) e^{\xi} \quad (26)$$

여기에서 $H_6 \sim H_9$ 는 임의의 상수이다. 앞의 (23)식과 (26)식을 (20)식 및 (21)식에 대입하고 경계조건과 (25)식에 따른 관계를 이용하면 7개의 임의의 상수에 관한 연립 방정식이 얻어진다. 이들 상수의 계수는 δ , R_a 및 a 로 이루어지는 함수이며 이들로 구성되는 다음과 같은 (7×7) 행렬식을 만족시키는 eigenvalue 들로부터 최소의 임계 Rayleigh 수 Ra_c 와 그에 해당되는 a_c 가 얻어진다.

4. 결과 및 검토

Prandtl 수 및 Peclet 수가 무한히 큰 경우에 있어서 임계 Rayleigh 수 Ra_c 와 자연대류가 처음으로 시작되는 축 방향의 거리 x_c 와의 관계를 Fig. 4에 나타내었다. 아울러 비교 검토를 위해서 Hwang 과 Cheng²⁾이 얻은 이론적인 해석 결과와 Kamotani 와 Ostrach,⁶⁾ 그리고 Kamotani, Ostrach 및 Miao⁸⁾들이 유체를 공

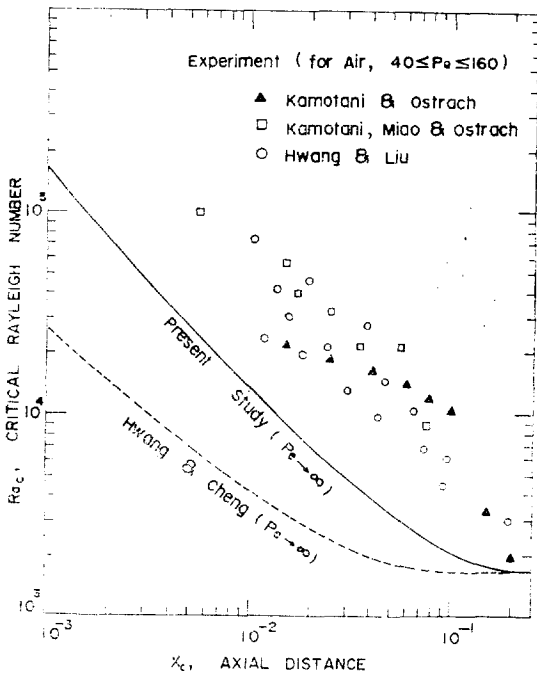


Fig. 4. Relations between Ra_c and x_c

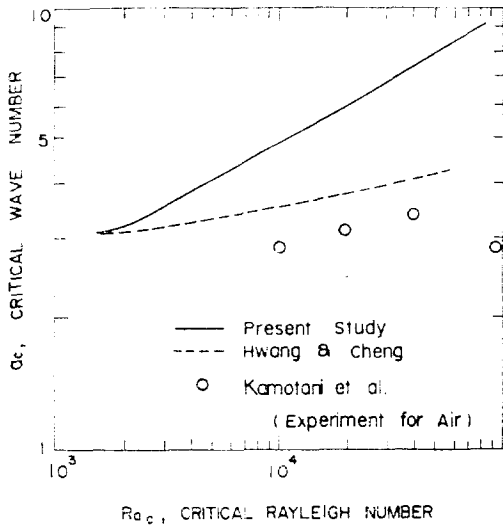


Fig. 5. Relations between Ra_c and α_c

기로 하여 얻은 실험 결과들을 함께 도시하였다. 그림으로부터 본 연구에서 얻은 결과는 Hwang과 Cheng²⁾의 결과보다 실험치에 보다 접근되어 있음을 잘 알 수 있다. x 가 커짐에 따라 Ra_c

는 1708에 접근하고 있는데 이는 기존의 많은 연구결과들과 일치하고 있다. x 가 작을 경우 $Ra_c \delta^3 = 582.3$ 으로 일정한 값을 보이고 있다.

Fig. 5에는 임계 파수 α_c 와 임계 Rayleigh 수 Ra_c 사이의 관계를 나타내었는데 x 가 작을 경우 $\alpha_c^3 = 0.011 Ra_c$ 인 관계가 유지된다. 불안정성이 시작될 때의 α_c 는 복잡한 양상을 보인다. 그러나 Prandtl 수가 큰 경우 교란의 크기는 임계 Rayleigh 수 Ra_c 가 증가함에 따라 작아진다는 사실이 일반적으로 알려져 있으며 이러한 경향은 Fig. 5에서도 잘 나타나 있다. 그림에서 본 연구의 결과는 Hwang과 Cheng²⁾이 얻은 결과보다도 실험결과와는 더 큰 차이를 보이고 있다. 그러나 본 연구의 결과는 Prandtl 수가 매우 큰 경우인데 비해 실험 결과는 Prandtl 수가 0.7인 경우이며 일반적으로 파수는 Prandtl 수가 작아질수록 감소되는 경향을 보이는 것으로 알려져 있으므로 Fig. 5의 결과만으로는 정확한 양상을 파악할 수 없다. 현재 이와 관련된 연구가 본 연구실에서 진행중에 있다.

5. 결 론

수평면상을 흐르는 Poiseuille 종류의 밀면이 일정한 온도로 유지되고 있는 계에서 Prandtl 수와 Peclet 수가 매우 큰 경우 유체의 열적 불안정성을 해석한 결과 다음과 같은 결론을 얻었다.

1. 열 경계층 두께와 경계면의 온도 기울기를 이용한 모사 기본온도 분포는 해석적으로 구한 온도 분포와 잘 일치하였다.

2. 수정된 개념을 도입한 불안정성 해석의 결과는 기존의 이론적인 연구결과보다 더욱 합리적으로 실험 결과들을 설명하여 주고 있다. 이는 수정된 개념의 타당성을 부분적으로 입증하여 주는 것이라고 판단된다. 따라서 Peclet 수와 Prandtl 수가 큰 경우 온도 교란을 열 경계층 내에 국한시킴으로써 유체의 열적 불안정성에 대한 보다 현실적인 해석의 가능성이 시사되었다.

감 사

본 연구는 1980년도 아산 사회복지사업 재단의 연구비 지원으로 이루어진 것입니다. 연구비를 지원하여 주고 있는 아산 사회복지사업 재단에 심심한 감사를 드립니다.

Nomenclature

- a : wave number
- $b_n^{(i)}$: coefficients defined in equations (24) and (25)
- c : amplification factor
- g : gravitational acceleration (m/sec²)
- Gr : Grashof number $\left(= \frac{g\beta\Delta Th^3}{\nu^2} \right)$
- h : distance between two infinite horizontal flat plane (m)
- P : pressure (kg/m/sec²)
- \bar{p} : dimensionless amplitude of pressure disturbance
- p : dimensionless pressure disturbance $\left(= \frac{h^2}{\rho\nu^2} p' \right)$
- p' : pressure disturbance (kg/m/sec²)
- Pe : Peclet number $\left(= \frac{U_m h}{K} \right)$
- Pr : Prandtl number $\left(= \frac{\nu}{K} \right)$
- Ra : Rayleigh number $\left(= \frac{g\beta\Delta Th^3}{\nu K} \right)$
- Re : Reynolds number $\left(= \frac{U_m h}{\nu} \right)$
- T_1, T_2 : fixed upper-and lower-plate temperature (°K)
- U_m : mean basic velocity (= m/sec)
- U_x, V_y, W_z : velocity components in cartesian coordinates (m/sec)
- u', v', w' : velocity disturbances in cartesian coordinates (m/sec)
- u, v, w : dimensionless velocity disturbances

$$\left(= \frac{h}{\nu} (u', v', w') \right)$$

X, Y, Z : cartesian coordinates (m)

x, y, z : dimensionless cartesian coordinates

$$\left(= \frac{1}{h} \left(\frac{X}{Pe}, Y, Z \right) \right)$$

\bar{x} : dimensionless axial distance (= $Pe x$)

w^*, u^*, p^* : dimensionless disturbances

$$\left(= \left(w, \frac{1}{Re} u, p \right) \right)$$

Greek Letters

- β : coefficient of thermal expansion (= °K⁻¹)
- θ : dimensionless temperature $\left(= \frac{\theta'}{T_2 - T_1} \right)$
- θ' : temperature disturbance (°K)
- θ^* : dimensionless temperature disturbance $\left(= \frac{\theta}{Pr} \right)$
- $\bar{\theta}$: dimensionless amplitude of temperature disturbance
- K : thermal diffusivity (m²/sec)
- δ : dimensionless thermal depth
- δ_{ij} : Kronecker delta
- ζ : dimensionless vertical distance $\left(= \frac{z}{\delta} \right)$
- ϕ_θ, ϕ_u : dimensionless basic temperature and velocity profile function respectively $\left(= \frac{T - T_1}{T_2 - T_1}, \frac{U}{U_m} \right)$
- $\phi_{\theta w}, \phi'_{\theta w}$: dimensionless wall temperature and its gradient respectively
- ν : Kinematic viscosity (m²/sec)
- ρ : density (kg/m³)

References

1. W. Nakayama, G.J. Hwang and K.C. Cheng, J. Heat Transfer, **92** (1970), 61.
2. G.J. Hwang and K.C. Cheng, J. Heat Transfer, **95** (1973), 72.
3. K.C. Cheng and Ray-Shing Wu, Appli. Sci. Res., **32** (1976), 327.

4. K.C. Cheng and Ray-Shing Wu, *Appli. Sci. Res.*, **33** (1977), 405.
5. M. Akiyama, G.J. Hwang and K.C. Cheng, *J. Heat Transfer*, **93** (1971), 335.
6. S. Ostrach and Y. Kamotani, *J. Heat Transfer*, **97** (1975), 220.
7. Y. Kamotani and S. Ostrach, *J. Heat Transfer*, **98** (1976), 62.
8. Y. Kamotani, S. Ostrach and H. Miao, *J. Heat Transfer*, **101** (1979), 222.
9. C.K. Choi and E.J. Davis, *J. Fluid Mech.*, **81** (1977), 565.
10. 김 장주, 최 창균, *화학공학*, **18** (1980), 359.
11. E.J. Davis, *Canad. J. Chem. Eng.*, **51** (1973), 562.